Septième partie:
Systèmes de points matériels, lois de conservation

Notions abordées:

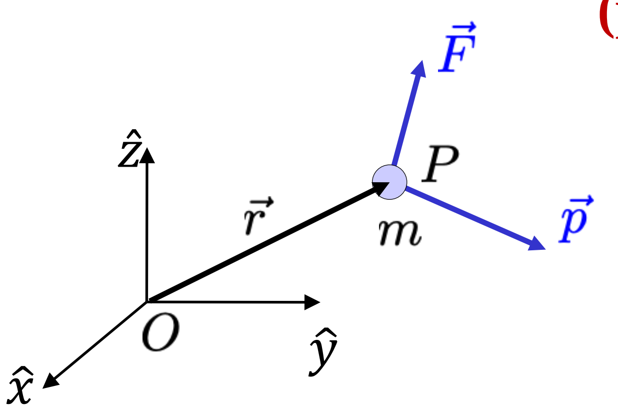
- 7.1 2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique pour un point matériel
- 7.2 Systèmes de points matériels: énoncé général de la 3ème loi de Newton
- 7.3 Systèmes isolés
- 7.4 Centre de masse, théorème du centre de masse
- 7.5 “Problème à deux corps”
- 7.6 Chocs et collisions

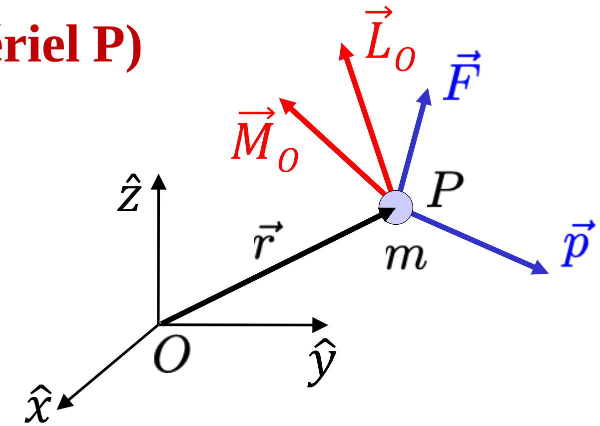
Buts:

- Assimiler et savoir appliquer les lois de la mécanique newtonienne à des systèmes impliquant plusieurs points matériels

7.1 Résumé: 2ème loi et théorème du moment cinétique

(pour un point matériel P)





$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

Résultante des forces:

$$\boxed{\vec{F} = \sum \vec{F}_i}$$

Moment de la résultante des force par rapport à un point O :

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i}$$

= 0 si force centrale

Quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Moment cinétique par rapport au point O :

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

2ème loi de Newton

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

équivalente à $\vec{F} = m\vec{a}$ si m constante

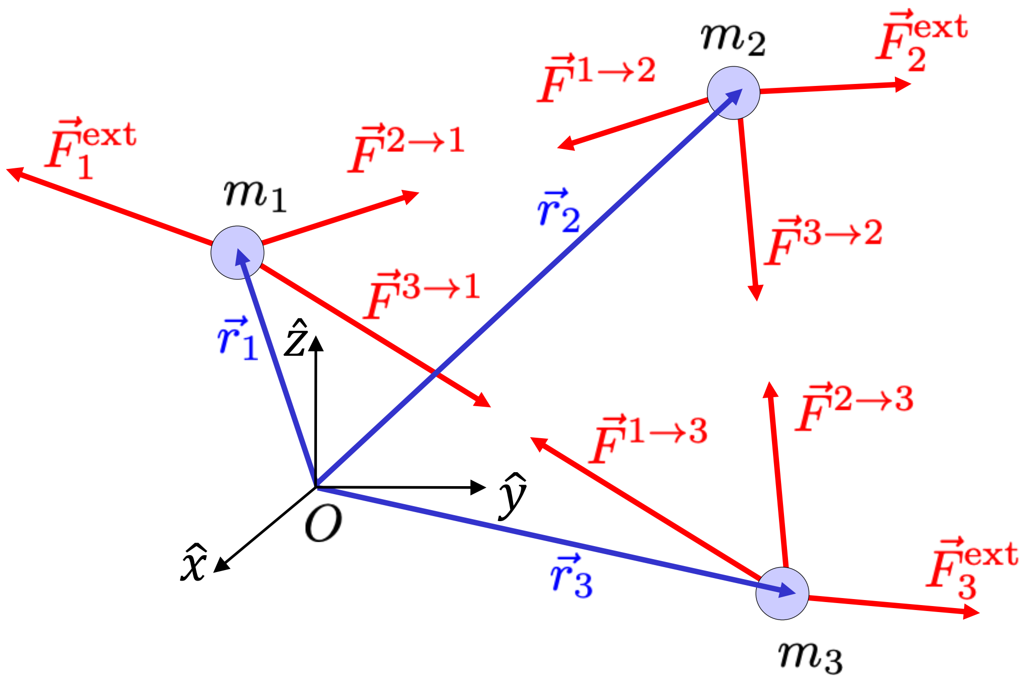
Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O}$$

= 0 si force centrale

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

7.2 Système de plusieurs points matériels



- On suppose que chaque point matériel P_α du système subit:

  - une résultante des forces extérieures F_α^{ext} exercée depuis l'extérieur du système
  - des forces intérieures $F^{\beta\to\alpha}$ exercées par les autres points P_β du système (uniquement forces « à deux corps ») $\Rightarrow$ Troisième loi de Newton, appliquée à chaque point P_α du système: action et réaction sont égales, opposées et dirigées selon le vecteur reliant les positions des points matériels

7.2 Système de plusieurs points matériels

Formulation mathématique de la 3ème loi de Newton:
action et réaction sont égales, opposées et dirigées selon le vecteur reliant les points matériels

$$\vec{F}^{\beta\to\alpha} + \vec{F}^{\alpha\to\beta} = 0$$

$$\vec{M}_O^{\beta\to\alpha} + \vec{M}_O^{\alpha\to\beta} = \vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}^{\beta\to\alpha} + \vec{r}_\beta \wedge \vec{F}^{\alpha\to\beta} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \wedge \vec{F}^{\beta\to\alpha} = 0$$

$\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta = \vec{r}_{\alpha\beta} \parallel \vec{F}^{\beta\to\alpha}$

3ème loi de Newton
(énoncé générale)

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{F}^{\beta\to\alpha} &= 0 \\ \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{M}^{\beta\to\alpha} &= 0\end{aligned}}$$

La somme des forces internes est nulle

La somme des moments des forces internes est nulle

7.2 Système de points matériels: eqs de mouvement

- $\boxed{\text{Quantité de mouvement totale:}}$ $\boxed{\vec{p} \equiv \sum_\alpha \vec{p}_\alpha}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_\alpha \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta\to\alpha} + \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha \right) = \underbrace{\sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta\to\alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_\alpha \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha}_{\equiv \vec{F}^{\text{ext}}}$$

- $\boxed{\text{Moment cinétique total (par rapport à O):}}$ $\boxed{\vec{L}_O \equiv \sum_\alpha \vec{L}_{O,\alpha}}$

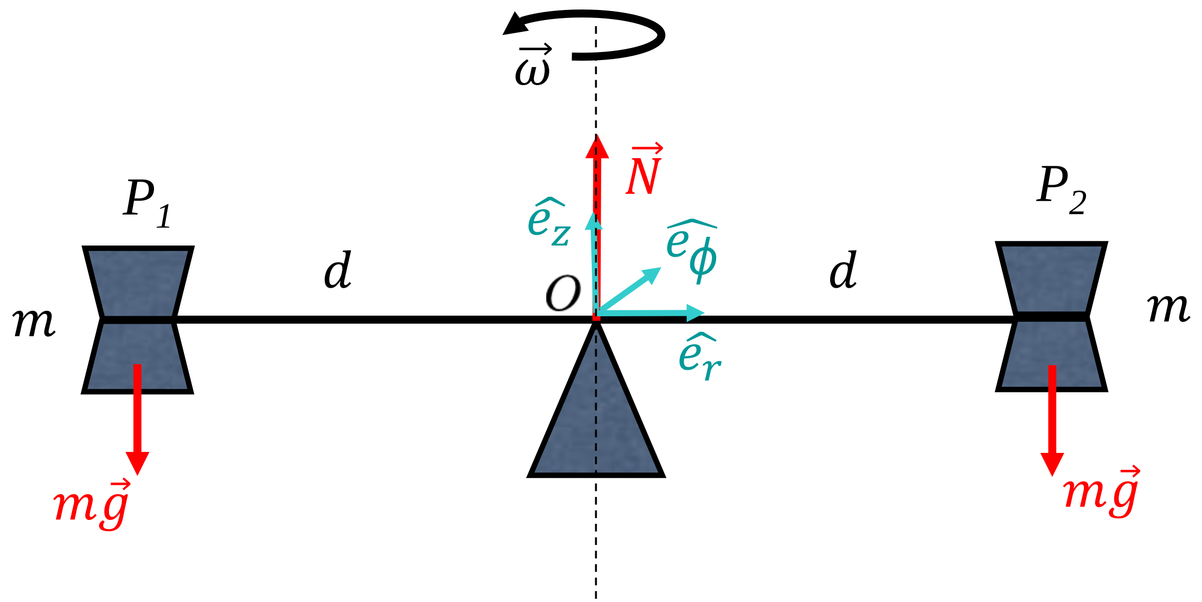
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_\alpha \frac{d\vec{L}_{O,\alpha}}{dt} = \sum_\alpha \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta\to\alpha} + \vec{M}^{\text{ext}}_{O,\alpha} \right) = \underbrace{\sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta\to\alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_\alpha \vec{M}^{\text{ext}}_{O,\alpha}}_{\equiv \vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

Lois générales de la dynamique pour un système de points matériels

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}^{\text{ext}} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \end{aligned}}$$

Seules les forces extérieures déterminent l'évolution:
- de la quantité de mouvement totale
- du moment cinétique total

7.2 Ex.: tabouret tournant



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 = \omega d \; \hat{e}_\phi$$

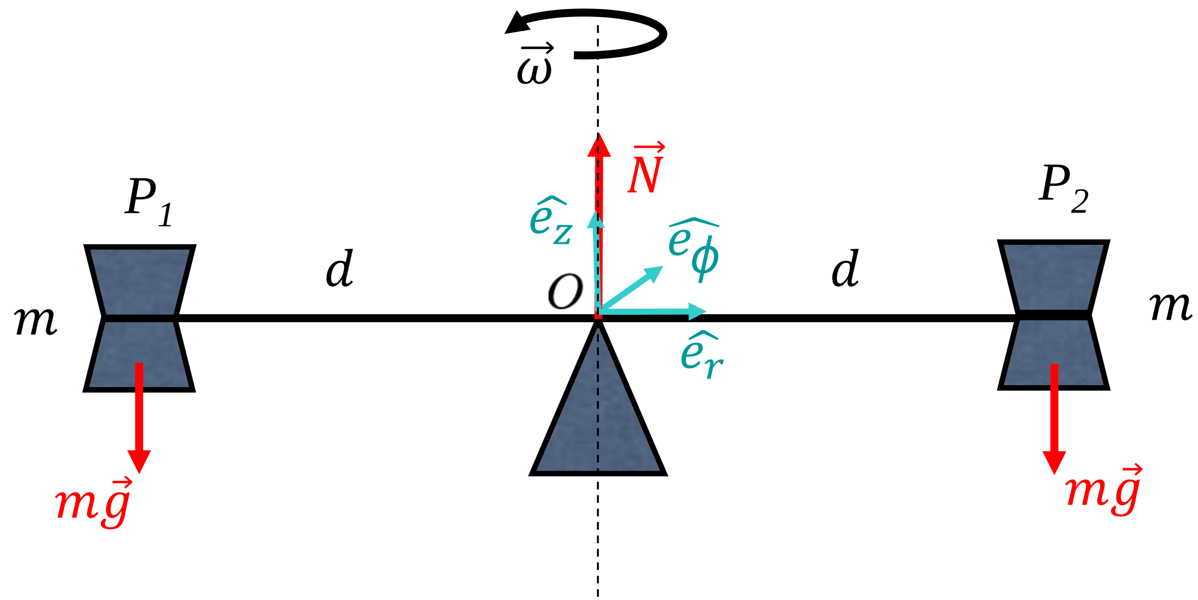
$$\Rightarrow \quad \vec{L}_O = 2d^2 m\omega \; \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad d^2\omega = cste$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$$

7.2 Ex.: tabouret tournant



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 = \omega d\ \hat{e}_\phi$$

$\Rightarrow$ $\vec{L}_O = 2d^2 m\omega\ \hat{e}_z$

$\Rightarrow$ $d^2\omega = cste$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = 0$$

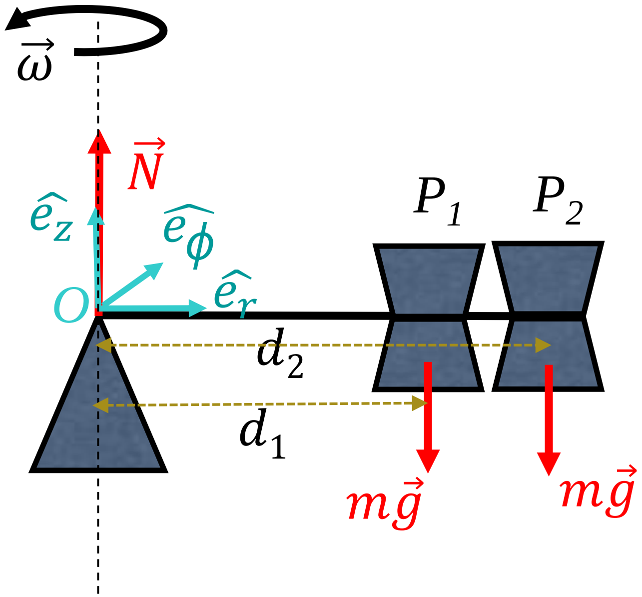
$\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = md^2\omega^2$$

$\Rightarrow$ E n'est pas conservée

7.2 Ex.: tabouret tournant

Coordonnées cylindrique $O\hat{e}_r\hat{e}_\phi\hat{e}_z$



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = \omega d_2\ \hat{e}_\phi$$

$$\vec{v}_1 = \omega d_1\ \hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_O = m\omega(d_1^2 + d_2^2)\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_O \text{ veut tourner autour de } \hat{e}_r$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = mg(d_1 + d_2)\ \hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = mg(d_1 + d_2)\ \hat{e}_\phi$$

[Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/669](https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/669) [Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/17](https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/17)

7.3 Lois de conservation pour un système isolé

- Pour un système isolé (aucune force de l'extérieur) $\Rightarrow$ $\vec{F}^{ext} = 0$; $\vec{M}_O^{ext} = 0$

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{constante}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \text{constante}$$

par rapport à n'importe quel point O du référentiel

- Pour un système partiellement isolé selon une direction fixe $\hat{u}$:

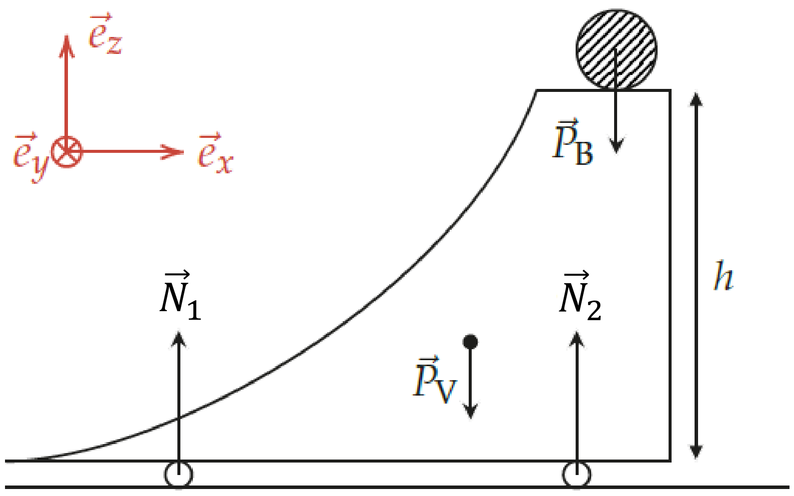
$$\vec{F}^{\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

$$\vec{M}_O^{ext} \cdot \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

- Si forces conservatives: E = constante

Permettent de résoudre de façon simple certains problèmes complexes

7.3 Ex: voiture à boulet



$$\vec{P}_V = m_V\,\vec{g}$$
$$\vec{P}_B = m_B\,\vec{g}$$

Forces externes sont verticales

$$\Rightarrow \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \hat{e}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_x = cte$$

$$m_B v_{Bx} + m_V v_{Vx} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{Bx} = -\frac{m_V v_{Vx}}{m_B}$$

Force de pesanteur est conservative $\Rightarrow E = K_B + K_V + V_B + V_V = cte$

$$m_B g h = \frac{1}{2} m_B v_{Bx}^2 + \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2$$

$$m_B g h = \frac{1}{2} m_B v_{Vx}^2 \frac{m_V^2}{m_B^2} + \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2 = \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2 \left(1 + \frac{m_V}{m_B}\right) \quad \Rightarrow \quad v_{Vx}^2 = 2gh \frac{m_B}{m_V\left(1 + \frac{m_V}{m_B}\right)}$$

$$\text{Si } m_B = m_V \quad \Rightarrow \quad v_{Vx} = \sqrt{gh}$$

7.3 Système à l'équilibre (statique)

- Un système est à l'équilibre si:

$$\begin{cases} \vec{r}_\alpha(t) = \text{constante} \\ \vec{v}_\alpha(t) = 0 \end{cases}$$

[pour tout point α du système]

- Dans ce cas on a: [pour tout point O du référentiel]

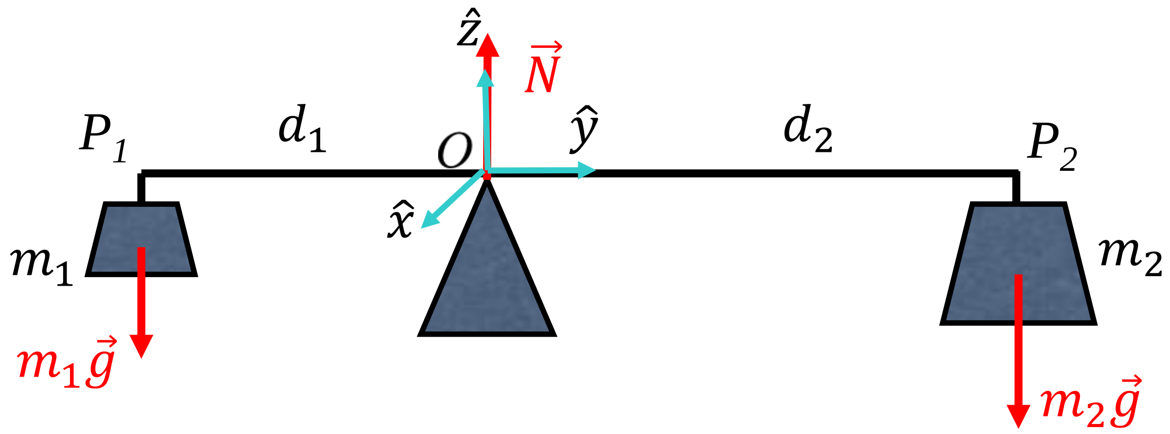
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = 0 \\ \vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \end{array}}$$

Conditions d'équilibre
pour un système de points matériels
(en particulier pour un solide indéformable)

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$ avec $\vec{r}_i$ =point d'application de la force $\vec{F}_i$

démo: balances

7.3 Ex.: balance en equlibre



A l'équilibre:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{N} + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{N} = -(m_1 + m_2)\vec{g}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{g} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{N} = \ d_1 m_1 g - d_2 m_2 g = 0$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$